Ecuaciones Cuadráticas

Ejercicio C.

Resuelva las siguientes ecuaciones**.**

1. $-x^2-4x-8=0$

2. $x^2+4x-1=0$

3. $2(x+1)^2+x^2=6x+5$

4. $11x^2+8x-1=0$

5. $x^2=3(1+2x)$

6. $(2x-1)^2+4=-2x^2$

7. $(x-3)^2+(2x+1)^2=4(x-1)^2+45$

8. $\sqrt{2}x^2+2x-\sqrt{8}=0$

9. $5x^2+2\sqrt{5}x+1=0$

10. $\frac{x(2x+1)}{2}=\frac{1}{3}$

11. $4x(x+1)=5(x^2+x+3)-1$

12. $(5x+1)^2=(4x+3)^2$

13. $\frac{x}{2}-\frac{x^2-3}{6}=\frac{1}{3}$

14. $\frac{x(x-3)}{5}-\frac{x+1}{15}=\frac{x-2}{15}-\frac{1}{3}$

- Discernir cuál tipo de **ecuación cuadrática** tenemos, facilita escoger el método de solución.

D. Resumen de la ecuación cuadrática

Caso especial	**Caso especial**	**Ecuación completa**	**Ecuación completa**
$\boldsymbol{ax^2+c=0}$	$\boldsymbol{ax^2+bx=0}$	$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$	$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$
Se despeja x y se encuentran las dos raíces cuadradas: $ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=\frac{-c}{a}$, • Si $\frac{-c}{a}\geq 0$ entonces $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $S=\left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}},\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$ • Si $\frac{-c}{a}<0$ entonces $S=\phi$	Se extrae el factor común x y se utiliza el Principio del producto nulo. $ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x=0$ o bien $ax+b=0$, $ax=-b$, $x=\frac{-b}{a}$ $S=\left\{0,\frac{-b}{a}\right\}$	Si se puede factorizar (en $\mathbb{Z}$) el lado izquierdo: Se factoriza el lado izquierdo y se utiliza el Principio del producto nulo. $\sqrt{\Delta}\in\mathbb{Z}^+$: Dos soluciones racionales. $\Delta=0$: Una única solución racional.	Si no se puede factorizar (en $\mathbb{Z}$) el lado izquierdo: • Si $\Delta>0$: Fórmula general: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $S=\{x_1,x_2\}$ • $\Delta<0$ No hay soluciones reales $S=\phi$

Ejercicio D. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1. $(x+1)^2-2x=5$

2. $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2=9$

3. $(2x+1)^2=(x+1)^2+4x^2$

4. $x(x-1)=5-x$

5. $(3x-1)^2-x^2=12$

6. $(14-x)x=48$

7. $(x+1)^2-3x+2=5-3x$

8. $2x^2+2x-2=0$

9. $x^2=\frac{2x-1}{5}$

10. $(2x+1)^2-4x=37$

11. $(x+3)^2=16$

12. $12x^2-36x+60=0$

13. $(2x-3)^2=x+2(7-x^2)$

14. $(3x-2)^2=9$

15. $\left(\frac{x+1}{3}\right)^2=\frac{x+17}{9}$

16. $(3x-2)^2-4x=-\frac{1+12x}{3}$

17. $(x-2)^2-(2x+1)^2=0$

18. $4(x^2+x)=4x+8$

19. $\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{3}=0$

20. $\frac{x^2}{2}+x-2=3x-4$

21. $(x+1)^2-4x=2(1-2x)$

22. $(5x-7)^2=49$

23. $2(x+6)^2=24x+100$

24. $5(x^2-2x)=8-10x$

25. $\sqrt{5}x^2+4x-\sqrt{5}=0$

26. $x^2-\frac{x-1}{2}=0$

27. $\frac{x(x-3)}{3}-\frac{x-2}{6}=\frac{1}{4}+\frac{6x+1}{12}$

28. $x^2-4x+12=\frac{5x+3}{2}$

29. $4x(x-2)=1$

30. $\sqrt{2}x^2+2x=0$

31. $(x+1)^3=(2+x)^3$

32. $(x-3)^3-x(x^2-2x-10)=-(x^2+21)$

- Las ecuaciones cuadráticas son muy útiles para **resolver problemas**.

E. Problemas que se resuelven mediante ecuaciones cuadráticas

Además de la lista de "traducciones" del lenguaje común a lenguaje algebraico que ya conocemos, debemos agregar que **el cuadrado de un número** x se representa por x^2 y que el **producto** de dos expresiones corresponde a su multiplicación.

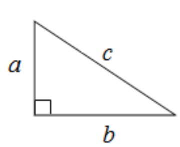
Otras frases comunes para el lenguaje algebraico

Frase	Se representa por	Donde x representa
El cuadrado de un número	x^2	El número
El producto de dos números	$x \cdot y$	El número (y es el otro número)

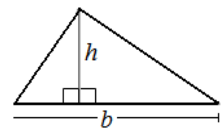
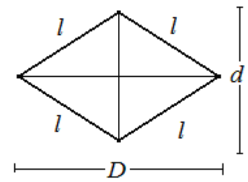
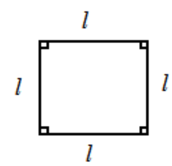
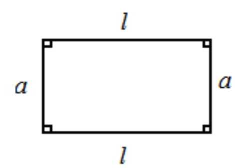
EJEMPLO 1. "El producto de dos números negativos es 20 y el doble del mayor aumentado en tres unidades equivale al menor". Encuentre los números.

EJEMPLO 2. El producto de dos números impares consecutivos es veinte unidades menor que once veces el menor de ellos. Encuentre los números.

Constantemente se plantean problemas de naturaleza geométrica. Lo primero que recordamos es el TEOREMA DE PITAGORAS: $a^2 + b^2 = c^2$, para un triángulo rectángulo de catetos a, b e hipotenusa c.



Además, las siguientes fórmulas:

Triángulo	Rombo
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$	 $A = \frac{D \cdot d}{2}$, $P = 4l$
Cuadrado	**Rectángulo**
 $A = l^2$ $P = 4l$	 $A = l \cdot a$ $P = 2a + 2l$

Donde, las variables significan: $A \to$ área, $b \to$ base, $h \to$ altura, $P \to$ perímetro, $d \to$ diagonal menor, $D \to$ diagonal mayor $l \to$lado (largo), $a \to$ancho.

EJEMPLO 3. En un terreno rectangular la diagonal mide 4 metros menos que el quíntuplo del ancho, y el largo mide un metro menos que la diagonal. Calcule el área del terreno.

EJEMPLO 4. Si el perímetro de un rectángulo es $14cm$ y el área $12cm^2$. Calcule la medida de las dimensiones del rectángulo.

Soluciones E.

EJEMPLO 1: "El producto de dos números negativos es 20 y el doble del mayor aumentado en tres unidades equivale al menor". Encuentre los números.

Sea x el mayor de los números, entonces el menor se puede expresar por $2x+3$. El enunciado afirma que $x(2x+3)=20$ y resolviendo esta ecuación:

$$2x^2+3x=20 \Rightarrow 2x^2+3x-20=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5},-4$$

Sin embargo, la primera de esas soluciones no es factible porque el enunciado dice que los números son negativos. Entonces, $x=-4$ y el menor de los números lo encontramos sustituyendo $2(-4)+3=-5$.

EJEMPLO 2: El producto de dos números impares consecutivos es veinte unidades menor que once veces el menor de ellos. Encuentre los números.

Sea x el menor de los números, entonces el siguiente número impar es $x+2$ .Según el enunciado:

$x(x+2)=11x-20$ y resolviendo,

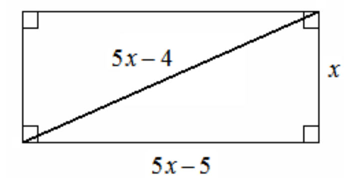
$$x^2+2x-11x+20=0 \Rightarrow x^2-9x+20=0 \Rightarrow x=5,\ x=4$$

Como los números son impares, $x=4$ no es una solución válida. Entonces el menor de los números es 5 y el mayor es $5+2=7$.

EJEMPLO 3: En un terreno rectangular la diagonal mide 4 metros menos que el quíntuplo del ancho, y el largo mide un metro menos que la diagonal. Calcule el área del terreno.

Sea x la medida del ancho del terreno.

Entonces el quíntuplo del ancho es $5x$ y por lo tanto la medida de la diagonal debe ser $5x-4$. Si el largo mide un metro menos que la hipotenusa entonces su medida es $5x-4-1=5x-5$.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2+(5x-5)^2=(5x-4)^2$ entonces:

$$x^2+\cancel{25x^2}-50x+25=\cancel{25x^2}-40x+16$$

$$\Rightarrow x^2-10x+9=0 \Rightarrow x=9, x=1$$

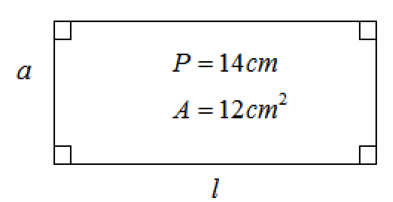
El ancho no puede ser 1 porque sino, la hipotenusa y el largo serían negativos. Por lo tanto, el ancho es 9, el largo es $5\cdot 9-5=45-5=40$ y el área es $A=l\cdot a=40\cdot 9=360\,m^2$.

EJEMPLO 4: Si el perímetro de un rectángulo es $14cm$ y el área $12cm^2$. Calcule la medida de las dimensiones del rectángulo.

Si a representa el ancho del rectángulo y l el largo, tenemos que $P=2a+2l$ y $A=l\cdot a$.

Luego, sustituyendo los datos tenemos en la fórmula del perímetro:

$$2a+2l=14 \Rightarrow 2a=14-2l \Rightarrow a=\frac{14-2l}{2}=7-l.$$



Y sustituyendo en la fórmula del área, $A=l\cdot a \Rightarrow 12=l(7-l)$ y resolvemos esta ecuación cuadrática: $12=7l-l^2 \Rightarrow l^2-7l+12=0$.

$$\Rightarrow (l-4)(l-3)=0 \Rightarrow l=4, l=3$$

Si $l=4 \Rightarrow a=7-4=3$, mientras que si $l=3 \Rightarrow a=7-3=4$, de donde en ambos casos las dimensiones del rectángulo son $3cm$ y $4cm$.

Ejercicio E. Resuelva los siguientes problemas.

1. Encuentre dos números positivos cuyo producto es $4/3$, si el número mayor excede en $4/3$ al menor.

2. El producto de dos números naturales consecutivos excede en tres al triple de la suma de dichos números. ¿Cuáles son los números?

3. Si el perímetro de un rectángulo es $24cm$ y el área es $35cm^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

4. Si el área de un rectángulo es $12,8$ y la longitud del ancho es un quinto del cuádruplo de la longitud de largo, entonces ¿Cuál es la medida del largo?

5. El cuadrado de un número entero negativo equivale a seis aumentado en cinco veces ese número. ¿Cuál es el número?

6. Un terreno rectangular de ancho $2m$ y largo $6m$ es rodeado exteriormente por un camino de ancho uniforme. Si el área del camino es $84m^2$. ¿Cuánto mide el ancho del camino?

7. En un triángulo el doble de la base excede en una unidad a su altura correspondiente. Si el área del triángulo es $14cm^2$. ¿Cuánto mide la base?

8. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $13cm$ y el cateto mayor mide 2 unidades más que el doble del cateto menor. ¿Cuánto miden los catetos?

9. Calcule la medida de los catetos de un triángulo rectángulo si el lado más corto es $3m$ menor que el mediano y $6m$ menor que la hipotenusa.

10. Determine la medida de los lados de un triángulo rectángulo, si se sabe que la hipotenusa es $8m$ y los catetos suman $10m$.

11. En un rombo de área $150ul^2$ una diagonal mide el triple de la otra. Calcule el perímetro.

12. Encuentre un número negativo cuyo cuadrado lo excede en 12 unidades.

13. Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma de los cuadrados sea 683.

14. Un agricultor quiere cercar $10\,000\,m^2$ de su terreno; dicho terreno es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar dicho lado. Calcula las dimensiones del terreno cercado si él dispone de $300m$ de cerca y desea que el terreno cercado también sea rectangular.

15. Una persona compró $¢50000$ en chocolates, veinte los regaló entre amigos y el resto los vendió con una ganancia de $¢150$ cada uno, Después de vender todos los chocolates se dio cuenta que puede comprar la cantidad inicial de chocolates y 88 más. ¿Cuál es el costo de cada chocolate?

16. Se tiene un terreno rectangular de dimensiones $30m$ por $25m$. El terreno se rodeó externamente por una acera de ancho uniforme. Si se sabe que el área del camino es de $236m^2$, determine aproximadamente el ancho del camino.

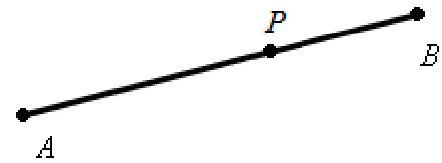
Para los siguientes problemas utilice la ecuación $v^2 = v_0^2 - 2gh$ que se utiliza en cinemática para relacionar la velocidad v que alcanza un objeto al ser lanzado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 hasta una altura h. Utilice $g \approx 10\, m/s^2$

17. Al lanzar una piedra con cierta velocidad una altura de $1,35m$ su velocidad se redujo a la mitad. Encuentre la velocidad con que fue lanzada la piedra.

18. Se lanza un objeto y cuando recorre una altura numéricamente igual a la velocidad con que fue lanzado la velocidad es $\sqrt{300}\, m/s$. Encuentre la altura.

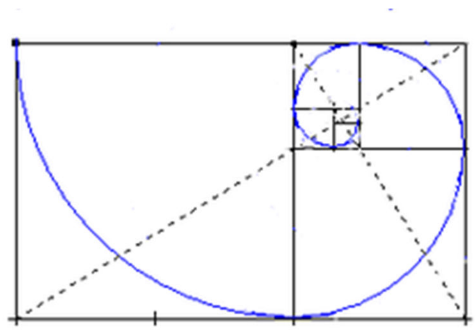
Problema Introductorio F.

I PARTE: Considere un segmento $\overline{AB}$ cualquiera. Se quiere, partir en dos pedazos mediante un punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ de modo $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$.



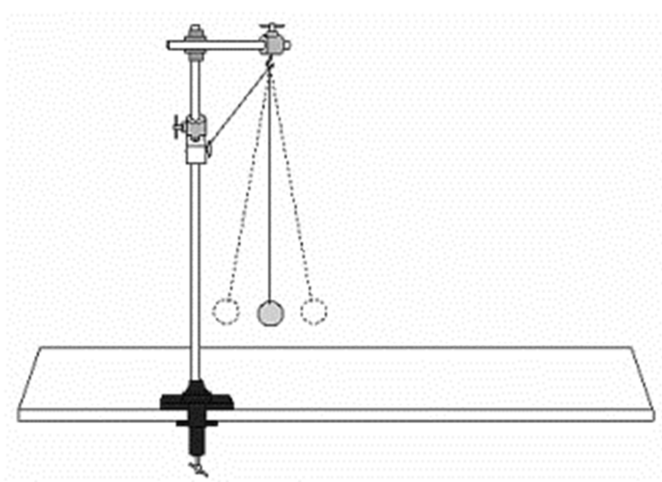
1. Encuentre numéricamente la razón $\frac{AB}{AP}=k$.

2. Analice qué tiene que ver esa razón, con el siguiente rectángulo.



3. Analice qué tiene que ver esa razón, con el pentágono que se estudió al inicio del capítulo de números irracionales y reales, en la construcción de la estrella.

II PARTE: El período de oscilación de un péndulo de longitud l se calcula mediante la fórmula $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde g es la constante de la gravedad. Calcule la longitud de un péndulo tal que al aumentar su longitud en $12\,m$, el período se duplica.



- Las **ecuaciones fraccionarias** permiten resolver problemas donde aparecen variables en el denominador de una expresión algebraica.

F. Ecuaciones fraccionarias

Existen muchas aplicaciones donde se necesita expresar una fracción de manera algebraica.

En el ejercicio introductorio vimos que permiten deducir el valor de una constante muy importante en la matemática, ya que aparece constantemente en la naturaleza.

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es conocido como el **número de oro**, o bien razón áurea. Está ligado a fenómenos naturales como el crecimiento de las poblaciones de conejos, las proporciones entre las medidas de partes de seres vivos, y muchos otros más.

Una **ecuación fraccionaria** es una ecuación equivalente a una de la forma $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Para resolver ecuaciones fraccionarias, utilizamos el principio del cociente nulo:

Principio del cociente nulo

Si $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ entonces $p(x) = 0$ y $q(x) \neq 0$.

Esto lo que significa es que para que una fracción sea nula, su numerador debe anularse también.

Pero, no debemos dejar de lado las restricciones, ya que el denominador no puede ser igual a cero.

EJEMPLO 5. Resuelva la ecuación

$$\frac{2x^2-6x}{x^2-6x+9} = 0$$

En los siguientes ejemplos, antes de aplicar el principio del cociente nulo es necesario expresar uno de los miembros de la ecuación como una sola fracción y que el otro miembro sea 0.

EJEMPLO 6. Resuelva la ecuación

a) $\frac{3}{2x} - \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{3+x}{x-2} = \frac{60}{x+2} + \frac{20}{x^2-4}$

EJEMPLO 7. Demuestre que $\phi = \sqrt{\phi+1}$

EJEMPLO 8. Una familia posee dos carros, y realiza un recorrido de $500km$. Un auto lo conduce la esposa y el otro el esposo. Ambos realizan el viaje con velocidad constante, de manera que la velocidad a la que conduce la esposa es $20\frac{km}{h}$ mayor que la velocidad del carro del esposo. Si ella realizó el recorrido en una hora y cuarto menos que su esposo, encuentre las velocidades a las que viajaron.

EJEMPLO 9. Alex y Michelle deben realizar un trabajo juntos. Saben que Alex, trabajando por su cuenta, lo terminaría en 6horas, mientras que Michelle en 5horas. ¿Cuánto tardarán trabajando juntos?

Soluciones F.

EJEMPLO 5: Resuelva la ecuación $\dfrac{2x^2-6x}{x^2-6x+9}=0$

PASO 1) Factorizando numerador y denominador: $\dfrac{2x(x-3)}{(x-3)^2}=0$.

PASO 2) El principio del cociente nulo afirma que: $2x(x-3)=0 \Rightarrow x=0,\ x=3$ y $(x-3)^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$.

PASO 3) Es decir 0 y 3 son las raíces del numerador y 3 es una restricción, por lo tanto no puede ser parte del conjunto solución: $S=\{0\}$.

- Con el ejemplo anterior debe quedar clara la importancia de establecer y tomar en cuenta las restricciones cuando se trabaja con fracciones algebraicas.

EJEMPLO 6: Resuelva la ecuación

a) $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{3}$

PASO 1) Igualamos la ecuación a 0: $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{3}=0$.

PASO 2) Tomando el común denominador: $\dfrac{3\cdot 3-6(x+1)-2x\cdot 1}{6x}=0$.

PASO 3) El denominador debe ser distinto de 0: $6x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$.

PASO 4) El numerador debe ser igual a 0: $3\cdot 3-6(x+1)-2x=0$.

PASO 5) Resolviendo la ecuación: $9-6x-6-2x=0 \Rightarrow 3-8x=0 \Rightarrow -8x=-3 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{-8}=\dfrac{3}{8} \Rightarrow S=\left\{\dfrac{3}{8}\right\}$.

b) $\dfrac{3+x}{x-2}=\dfrac{60}{x+2}+\dfrac{20}{x^2-4}$

PASO 1) Igualando la ecuación a 0 y factorizando los denominadores:

$$\frac{3+x}{x-2}-\frac{60}{x+2}-\frac{20}{(x-2)(x+2)}=0.$$

PASO 2) Tomando el denominador común, $\dfrac{(3+x)(x+2)-60(x-2)-20}{(x-2)(x+2)}=0$.

PASO 3) Las restricciones son $x\neq \pm 2$.

PASO 4) Eliminando el denominador $(3+x)(x+2)-60(x-2)-20=0$.

PASO 5) Resolviendo: $3x+6+x^2+2x-60x+120-20=0 \Rightarrow x^2-55x+106=0 \Rightarrow x=53,\ x=2$.

PASO 6) Pero como 2 es una restricción, entonces $\Rightarrow S=\{53\}$.

De nuevo, el paso 3) significa tomar en cuenta las restricciones mientras que el paso 4) significa que después de tomar en cuenta las restricciones es válido eliminar el denominador (siempre y cuando el otro lado de la ecuación sea 0).

EJEMPLO 7: Demuestre que $\phi = \sqrt{\phi + 1}$

Una de las ecuaciones que define ϕ es $\phi^{-1} = \phi - 1$ y esta es equivalente a:

$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \Rightarrow 1 = \phi^2 - \phi \Rightarrow 1 + \phi = \phi^2$. Como $\phi > 0$, al sacar raíz cuadrada obtenemos: $\phi = \sqrt{\phi + 1}$.

- Los problemas que de cinemática relacionados con distancia, velocidad y tiempo se pueden resolver con ecuaciones fraccionarias.
  Recordemos que la distancia que recorre un objeto a velocidad constante v en un tiempo t se puede calcular con la fórmula $d = v \cdot t$.

EJEMPLO 8: Una familia posee dos carros, y realiza un recorrido de $500km$. Un auto lo conduce la esposa y el otro el esposo. Ambos realizan el viaje con velocidad constante, de manera que la velocidad a la que conduce la esposa es $20\frac{km}{h}$ mayor que la velocidad del carro del esposo. Si ella realizó el recorrido en una hora y cuarto menos que su esposo, encuentre las velocidades a las que viajaron.

Sea x la velocidad a la que conduce el esposo, entonces su esposa conduce a $x + 20$.

Además, despejando de la relación $d = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{v}$.

Entonces, el tiempo que tarda el esposo en completar el viaje es $t_1 = \frac{500}{x}$ y el tiempo que tarda la esposa es $t_2 = \frac{500}{x+20}$.

Según el enunciado $t_2 = t_1 - 1,25$, ya $1,25$ es la manera de interpretar una hora y cuarto.

Sustituyendo, $\frac{500}{x+20} = \frac{500}{x} - 1,25$ que al escribir con un denominador común:

$$\frac{500x}{x(x+20)} = \frac{500(x+20) - 1,25 \cdot x(x+20)}{x(x+20)}.$$

Las restricciones son $x \neq 0$ y $x \neq -20$.

Al cancelar el denominador obtenemos:

$$500x = 500(x+20) - 1,25x(x+20)$$
$$\Rightarrow \cancel{500x} = \cancel{500x} + 10\,000 - 1,25x^2 - 25x.$$
$$\Rightarrow 1,25x^2 + 25x - 10000 = 0$$

Y resolviendo esta ecuación, $x = 80\frac{km}{h}$ y, por lo tanto, la esposa viajaba a $100\frac{km}{h}$.

EJEMPLO 9: Alex y Michelle deben realizar un trabajo juntos. Saben que Alex, trabajando por su cuenta, lo terminaría en $6\,\text{horas}$, mientras que Michelle en $5\,\text{horas}$. ¿Cuánto tardarán trabajando juntos?

En realidad, este es un problema de velocidad también, dado que tenemos las velocidades de trabajo separadas y buscamos el tiempo que tardan trabajando junto, que lo encontramos sumando las velocidades: $v = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$. Así:

$$\frac{\overset{\text{un trabajo}}{\hat{1}}}{\underbrace{5}_{\text{tiempo de Alex}}} + \frac{\overset{\text{un trabajo}}{\hat{1}}}{\underbrace{6}_{\text{tiempo de Michelle}}} = \frac{\overset{\text{un trabajo}}{\hat{1}}}{\underbrace{t}_{\text{tiempo juntos}}}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{30} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{30}{11} \approx 2,72\,\text{horas}$$

Ejercicio F.

I PARTE: Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias.

1. $\dfrac{3x^2+x-2}{6x^2-7x+2}=0$

2. $\dfrac{3x-5}{-x+1}=\dfrac{-2}{3}$

3. $\dfrac{3-x}{12-3x}+\dfrac{x-3}{(2x-6)^2}=0$

4. $\dfrac{4}{(2x-3)(1-4x)}=\dfrac{5}{1-16x^2}$

5. $\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{6a^2}{x^2-a^2},\ a\in\mathbb{R}$

6. $x-2=\dfrac{15}{x}$

7. $\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{9}{x}$

8. $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{-4x}{x^2-4x-21}$

9. $\dfrac{5}{9-x^2}+\dfrac{1-x}{x^2+5x+6}=\dfrac{-2}{x-3}$

10. $\dfrac{2}{12x^2+11x-5}=\dfrac{3}{1-9x^2}$

11. $\left(\dfrac{3x-2}{x+5}\right)+3\left(\dfrac{x+5}{3x-2}\right)+2=0$

12. $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{3}$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. María terminó una competencia de triatlón que involucraba natación, ciclismo y atletismo en 2 horas y media. La velocidad de María en bicicleta fue seis veces mayor que su velocidad nadando. Y su velocidad corriendo fue 5 kilómetros por hora mayor que su velocidad nadando. Aproxime las tres velocidades suponiendo que las velocidades fueron constantes y que el trayecto de natación fue medio kilómetro, el de ciclismo fue 25 kilómetros y el de atletismo 6 kilómetros.

2. Una motocicleta viaja a cierta velocidad una distancia de $300km$. Si su velocidad se aumenta en $10\frac{km}{h}$, entonces el tiempo en que recorre la misma distancia hubiese sido una hora menos. Encuentre el tiempo que hubiera tardado en recorrer los $300km$ a la velocidad mayor.

3. Un número es el doble del otro. Si la suma de sus recíprocos es 2, encuentre los números.

4. La velocidad de un bote en agua tranquila es $20\frac{km}{h}$. Si tarda el mismo tiempo en ir río abajo (con la corriente a favor) 3 kilómetros, que lo que tarda en recorrer $2km$ río arriba (contra corriente), encuentre la velocidad de la corriente.

5. Juan puede hacer un trabajo en dos horas y media mientras que Pedro lo realiza en tres horas y media. ¿Cuánto tardaran en realizarlos juntos?

6. El tren A viaja a $15\frac{km}{h}$ más rápido que el tren B. Si el tren A tarda en recorrer $150km$ lo mismo que tarda el tren B en recorrer $120km$, ¿cuáles son las velocidades de los trenes?

7. Con respecto a la razón áurea ϕ demuestre que $\phi^3=2\phi+1$ y $\phi^{-2}=2-\phi$.

8. Considere el número irracional infinito:

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

donde se realizan la operación infinitas veces:

a. Justifique que $x=1+\dfrac{1}{x}$.

b. Encuentre el valor de x.

c. Calcule el valor de $y=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$

- Mediante una sustitución es posible reducir algunas ecuaciones a cuadráticas. En particular, las **ecuaciones radicales** son las que tienen la incógnita dentro del denominador.

G. Ecuaciones radicales y sustituciones

Como vimos en el ejercicio introductorio es común que en la resolución de problemas aparezcan ecuaciones donde se buscan incógnitas dentro de radicales.

Tenemos la siguiente definición:

> Una **ecuación radical** es una ecuación cuyas variables están dentro de un radical.

Dependiendo de la naturaleza de la ecuación es posible utilizar diferentes métodos para resolver estas ecuaciones. El más común es el método de eliminación de radicales. Lo detallamos a continuación:

El método de eliminación de radicales

Para resolver una ecuación radical se debe despejar el radical, y elevar a la potencia del índice (por lo general al cuadrado) y repetir este procedimiento hasta que no aparezcan radicales.

Después, se resuelve la ecuación que queda.

Cuando elevamos al cuadrado los dos miembros de una ecuación, la ecuación que queda, en general, no es equivalente a la ecuación original.

Por eso, en las ecuaciones radicales es imprescindible verificar las soluciones en la ecuación original.

EJEMPLO 10. Resuelva la siguiente ecuación $\sqrt{2x+1}+1=x$

EJEMPLO 11. Resuelva $(4x-2)^{\frac{1}{2}}+5=0$

EJEMPLO 12. Resuelva $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=7$

EJEMPLO 13. El período de oscilación de un resorte se calcula con la fórmula $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ donde m es la masa colgada en el resorte y k es una constante que depende del resorte. Si tenemos dos resortes cuya constante es $k=1600\,{}^{N}\!/_{m}$, la masa colgada en uno es cinco kilogramos mayor que la masa colgada en el otro y el período del más pesado es $\frac{\pi}{20}$ segundos más rápido, encuentre la masa colgada en cada uno de los resortes.

Otro método que podemos utilizar para resolver ecuaciones radicales, o bien, de otros tipos es mediante una sustitución.

Cuando en una ecuación aparece varias veces un mismo paréntesis podemos renombrarlo para resolver la ecuación.

EJEMPLO 14. Resuelva la siguiente ecuación $(3x-2)^4-7(3x-2)^2+12=0$

Soluciones G.

EJEMPLO 10: Resuelva la siguiente ecuación $\sqrt{2x+1}+1=x$

PASO 1) Despejando el radical: $\sqrt{2x+1}=x-1$.

PASO 2) Elevando al cuadrado los miembros de la ecuación: $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(x-1)^2$.

PASO 3) Luego se resuelve la ecuación que queda: $2x+1=x^2-2x+1 \Rightarrow 0=x^2-4x \Rightarrow x=0, x=4$.

PASO 4) Se prueban las soluciones: $\sqrt{2\cdot 0+1}+1\neq 0, \quad \sqrt{2\cdot 4+1}+1=4$.

PASO 5) Se escribe el conjunto solución: $S=\{4\}$.

EJEMPLO 11: Resuelva $(4x-2)^{\frac{1}{2}}+5=0$

PASO 1) Recordemos que el exponente $\dfrac{1}{2}$ significa $\sqrt{}$: $\sqrt{(4x-2)}+5=0$.

PASO 2) Despejando el radical: $\sqrt{4x-2}=-5$.

PASO 3) Observemos que un radical de índice par nunca puede ser igual a un número negativo, entonces la ecuación no tiene soluciones. $S=\phi$.

EJEMPLO 12: Resuelva $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=7$

PASO 1) Como aparecen dos radicales, debemos escoger uno para eliminar.

PASO 2) Despejando el radical: $\sqrt{3x+1}=7-\sqrt{x+4}$.

PASO 3) Elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(7-\sqrt{x+4}\right)^2$.

PASO 4) Simplificando

$$3x+1=(7)^2-2\cdot 7\cdot\sqrt{x+4}+\left(\sqrt{x+4}\right)^2$$

$$3x+1=49-14\sqrt{x+4}+x+4$$

PASO 5) Como aparece otro radical debe repetirse el proceso:

PASO 6) Despejando el radical y dividiendo por 2 : $14\sqrt{x+4}=52-2x \Rightarrow 7\sqrt{x+4}=26-x$.

PASO 7) Elevando al cuadrado: $\left(7\sqrt{x+4}\right)^2=(26-x)^2$.

PASO 8) Simplificando y resolviendo la ecuación: $49(x+4)=676-52x+x^2$.

$$49x+196=676-52x+x^2 \Rightarrow 0=x^2-101x+480 \Rightarrow x=96,\ x=5.$$

PASO 9) Se prueban las soluciones: $\sqrt{3\cdot 96+1}+\sqrt{96+4}=\sqrt{289}+\sqrt{100}=17+10=27\neq 7$.

$\sqrt{3\cdot 5+1}+\sqrt{5+4}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.

PASO 10) Se escribe el conjunto solución: $S=\{5\}$.

- Las soluciones deben probarse porque pueden aparecer soluciones extrañas como 96 en la ecuación anterior.

EJEMPLO 13: El período de oscilación de un resorte se calcula con la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ donde m es la masa colgada en el resorte y k es una constante que depende del resorte. Si tenemos dos resortes cuya constante es $k = 1600\,{}^{N}\!/_{m}$, la masa colgada en uno es cinco kilogramos mayor que la masa colgada en el otro y el período del más pesado es $\frac{\pi}{20}$ segundos más rápido, encuentre la masa colgada en cada uno de los resortes.

Si x representa la menor masa colgada, entonces su período es $2\pi\sqrt{\frac{x}{1600}} = \frac{\cancel{2}\pi\sqrt{x}}{\cancel{40}} = \frac{\pi\sqrt{x}}{20}$.

En tal caso, la otra masa es $(x+5)$ y su período es $2\pi\sqrt{\frac{x+5}{1600}} = \frac{\cancel{2}\pi\sqrt{x+5}}{\cancel{40}} = \frac{\pi\sqrt{x+5}}{20}$.

El enunciado afirma que $\frac{\pi\sqrt{x+5}}{20} = \frac{\pi\sqrt{x}}{20} + \frac{\pi}{20}$. Para simplificar, podemos sacar $\frac{\pi}{20}$ a factor común en ambos lados de la ecuación: $\cancel{\frac{\pi}{20}}\sqrt{x+5} = \cancel{\frac{\pi}{20}}\left(\sqrt{x}+1\right) \Rightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{x}+1$ y esta ecuación resolvemos elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \Rightarrow x+5 = x+2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4 = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow 4 = x.$$

Debemos verificar, que el valor encontrado es solución de la ecuación original: $\sqrt{4+5} = \sqrt{4}+1 \Leftrightarrow 3 = 3$.

Por lo tanto, $x = 4$ es la solución al problema y los resortes tienen masas colgadas iguales a $4kg$ y $9kg$.

EJEMPLO 14: Resuelva la ecuación $(3x-2)^4 - 7(3x-2)^2 + 12 = 0$

PASO 1) La ecuación se puede escribir de la forma: $\left[(3x-2)^2\right]^2 - 7(3x-2)^2 + 12 = 0$.

PASO 1) Haciendo la sustitución, $u = (3x-2)^2$ tenemos $u^2 - 7u + 12 = 0$.

PASO 2) Factorizando: $(u-4)(u-3) = 0$.

PASO 3) Volviendo a la variable original: $\left[\underbrace{(3x-2)^2}_{(3x-2)} - \underbrace{4}_{2}\right]\left[\underbrace{(3x-2)^2}_{(3x-2)} - \underbrace{3}_{\sqrt{3}}\right] = 0$.

PASO 4) Factorizando los términos: $\left[(3x-2)-2\right]\left[(3x-2)+2\right]\left[(3x-2)-\sqrt{3}\right]\left[(3x-2)+\sqrt{3}\right] = 0$.

PASO 5) Simplificando: $(3x-4)(3x)\left(3x-2-\sqrt{3}\right)\left(3x-2+\sqrt{3}\right) = 0$.

PASO 6) Utilizando el principio del producto nulo: $x = \frac{4}{3},\ x = 0,\ x = \frac{2+\sqrt{3}}{3},\ x = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

PASO 7) Por lo tanto: $S = \left\{0, \frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right\}$.

Ejercicio G.

I PARTE: Resuelva las siguientes ecuaciones radicales.

1. $\sqrt[3]{5x-3}=2$
2. $\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}=3$
3. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}=3$
4. $x+2+5\sqrt{x+2}=36$
5. $\sqrt{x+4}-8=-10$
6. $\sqrt{x+5}+x=7$
7. $\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}$
8. $\sqrt{3x+1}+x=2x-3$
9. $(x+2)^{\frac{1}{2}}-(2x+2)^{\frac{1}{2}}=-1$
10. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=1$
11. $\sqrt{x^2+7}-4=0$
12. $\sqrt{2x-\sqrt{7-6x}}=1$

II PARTE: Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando una sustitución.

1. $(x+2)^4-3(x+2)^2-4=0$
2. $(x^2-3x)^2-5(x^2-3x)+4=0$
3. $(3x-6)^4-17(3x-6)^2=18$
4. $8(x^2-3)^4-14(x^2-3)^2-9=0$
5. $2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$
6. $x^5-31x^{\frac{5}{2}}-32=0$
7. $x^{\frac{3}{2}}-7x^{\frac{3}{4}}-8=0$
8. $(5x-1)^{\frac{3}{5}}-9(5x-1)^{\frac{3}{10}}+8=0$

III PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Se estima que la población de un pequeño pueblo será en miles de habitantes $P=15+\sqrt{3t+2}$, después de t años después del último censo. ¿Cuándo llegará la población a $25\,000$ habitantes?

2. Encuentre aproximadamente la longitud de un péndulo, cuyo período de oscilación es $15,85s$. Use $g\approx 9,8\,{}^{m}\!/_{s^2}$.

3. Se tiene un resorte de constante es $k=900\,{}^{N}\!/_{m}$. Encuentre la masa de un objeto, tal que si se reduce en $13kg$ esta masa, el período de oscilación disminuye en $\frac{\pi}{15}$ segundos.

4. Encuentre dos números que difieren en 176 cuyas raíces cuadradas difieren en 4.

5. En un triángulo rectángulo de área $60cm^2$ el perímetro es $40cm$. Encuentre la medida de cada uno de los lados.

6. Las ecuaciones de demanda y oferta de una marca de teléfonos están dadas por: demanda $p=14+0,01q$ y oferta $p=50-0,5\sqrt{q}$ donde p es el precio y q es la cantidad. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio (donde se cumplen las dos ecuaciones simultáneas).

7. Un cono recto de papel para tomar agua se debe construir con $125cm^2$ de papel. Si la altura del cono debe ser $10cm$, encuentre, aproximadamente, la medida del radio.

   $A_{\text{lateral del cono}}=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

8. Considere el número irracional infinito $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$ donde se realiza la operación infinitas veces:
   a) Justifique que $x^2-1=x$.
   b) Encuentre el valor de x.
   c) Calcule el valor de $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$

AUTOEVALUACION Ecuaciones Cuadráticas

I PARTE: Selección única // **Ecuaciones cuadráticas**

1) El conjunto solución de $x^2 = 5x + 6$ es:

A) $\{-2,-3\}$

B) $\{2,3\}$

C) $\{-1,6\}$

D) $\{1,-6\}$

2) Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ satisface $b^2 = 4ac$, entonces, el conjunto solución:

A) Tiene un único elemento real.

B) Tiene dos elementos reales distintos.

C) Tiene dos elementos racionales distintos.

D) Es vacío.

3) El conjunto solución de $(x-1)(2x+3) = -x(1-x)$ es:

A) $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

B) $\{-3,3\}$

C) $\{-3,1\}$

D) $\{-3\}$

4) De las ecuaciones:

I. $x^2 = 0$

II. $x^2 + 1 = 0$

¿cuáles tienen conjunto solución vacío?

A) Solo I.

B) Solo II.

C) Ambas.

D) Ninguna.

5) De las ecuaciones: **I)** $x^2 = 4$ y **II)** $(x-1)^2 = 0$, ¿cuáles tienen conjunto solución con un único elemento?

A) Solo I.

B) Solo II.

C) Ambas.

D) Ninguna.

6) El conjunto solución de $-3 = x(x+2)$ es:

A) $\{-1,3\}$

B) $\{-3,1\}$

C) $\{\ \}$

D) $\{1,3\}$

7) Para la ecuación $ax^2 + bx = 0 \quad a,b \neq 0$ se cumple con certeza:

A) El conjunto solución tiene un único elemento real.

B) El conjunto solución es vacío.

C) 0 es parte del conjunto solución.

D) Ninguna de las anteriores.

8) Una solución de $2x^2 = 4 - \frac{x(x+3)}{2}$ es:

A) -1

B) $\frac{-8}{5}$

C) $\sqrt{\frac{11}{5}}$

D) $\frac{-3+\sqrt{89}}{10}$

9) Para la ecuación $ax^2 + c = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0$ es IMPOSIBLE que el conjunto solución tenga:

A) Tenga un único elemento real.

B) Tenga dos elementos reales distintos.

C) Tenga dos elementos racionales distintos.

D) Sea vacío.

10) El conjunto solución de $x(x-2) - 4(x-3) = 2$ es:

A) $\{\ \}$

B) $\{2,5\}$

C) $\{3\}$

D) $\{2+\sqrt{11}\,,\,2-\sqrt{11}\}$

11) El conjunto solución de $3x^2-9x=(x-3)^2$ es:

A) $\{-3\}$

B) $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{3}{2},-3\right\}$

D) $\left\{\frac{-3}{2},3\right\}$

12) La ecuación $2x^2+4x+c=0$ cumple $\Delta=36$. Entonces, una solución de la ecuación es:

A) $\frac{-5}{2}$

B) $\frac{11}{2}$

C) 8

D) $\frac{5}{2}$

13) El conjunto solución de $6(x^2-6)=4-x$ tiene:

A) Dos soluciones enteras.

B) Una solución entera y una racional no entera.

C) Dos soluciones racionales no enteras.

D) Dos soluciones irracionales.

14) Una ecuación que tiene como raíces -6 y 4 es:

A) $2x^2+4x-48=0$

B) $2x^2-4x-48=0$

C) $3x^2-6x+72=0$

D) $3x^2+6x+72=0$

15) Una solución de $(2x+1)(x-3)=(x-3)^2$ es:

A) -2

B) -3

C) -4

D) $-2\sqrt{3}$

16) Una solución de $49a^2=(5a-3x)^2$, con $a\neq 0$, es:

A) $4a$

B) $\frac{2a}{3}$

C) $-2a$

D) $\frac{-4a}{3}$

17) Una solución de $x(x+2)=2$ es:

A) 0

B) 2

C) $-1-\sqrt{3}$

D) $-1+\sqrt{2}$

18) Una solución de $2x(x-2)+2=5-3x$ es:

A) 1

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{-1}{2}$

D) $\frac{-3}{2}$

19) Las soluciones de $2x^2-7x+3=0$ son:

A) $\frac{-3}{2}$ y -1

B) $\frac{-1}{2}$ y -3

C) $\frac{3}{2}$ y 1

D) $\frac{1}{2}$ y 3

20) Las soluciones de $\frac{x}{4}=\frac{1}{3x-4}$ son:

A) $\frac{4}{3}$ y 4

B) -2 y $\frac{2}{3}$

C) -2 y 2

D) $-\frac{2}{3}$ y 2

21) Una solución de $x-2=\dfrac{(x-3)(x-2)}{3}$ es:

A) $\{6\}$

B) $\{6,2\}$

C) $\{2\}$

D) $\{\ \}$

22) Una solución de $2(x-1)^2-(x-1)=4$ es:

A) $\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$

B) $\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$

C) $\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$

D) $\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$

23) Una ecuación cuyo conjunto solución es $\left\{\dfrac{5-\sqrt{7}}{2},\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}\right\}$ es:

A) $6x^2+30x+27=0$

B) $6x^2+30x-27=0$

C) $2x^2-10x+9=0$

D) $2x^2-10x-9=0$

Problemas

24) La expresión "El cuadrado de un número disminuido **en el** doble del mismo número", donde, "x" representa el número, se expresa algebraicamente:

A) $2x-x^2$

B) $4x-2x$

C) x^2-4x

D) x^2-2x

25) La expresión "El cuadrado de un número disminuido **del** doble del mismo número", donde, "x" representa el número, se expresa algebraicamente:

A) $2x-x^2$

B) $4x-2x$

C) x^2-4x

D) x^2-2x

26) La expresión "El producto de dos números consecutivos", donde, "x" representa el **mayor** de los números, se expresa algebraicamente:

A) $x(x+1)$

B) $(x-1)x$

C) $x+(x+1)$

D) $(x-1)+x$

27) La expresión "El producto de dos números pares consecutivos", donde, "x" representa el **menor** de los números, se expresa algebraicamente:

A) $x(x+2)$

B) $(2x+2)\cdot 2x$

C) $x(x-2)$

D) $(x-1)x$

28) Dados dos números pares consecutivos, el cuadrado del mayor sumado al menor equivale a 154. ¿Cuáles son los números? Si "x" representa el número menor, una ecuación que permite resolver el problema es:

A) $x^2+x+4=154$

B) $x^2+x+1=154$

C) $x^2+5x+4=154$

D) $x^2+3x+1=154$

29) El producto de dos números negativos es $\frac{1}{2}$. Si el mayor excede en $\frac{1}{2}$ al menor. ¿Cuál es el número menor?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{-1}{2}$

C) 1

D) -1

30) La suma de dos números es 23 y su producto 102. ¿Cuáles son esos números?

A) -17 y -6

B) -7 y 30

C) 11 y 12

D) 6 y 17

31) El producto de dos números positivos que están en razón $3:4$ es 108. Entonces, su suma es:

A) 9

B) 12

C) 16

D) 21

32) Un alambre se corta en dos piezas de tal forma que el largo de una de ellas es $3m$ mayor que el largo de la otra. Si la suma de los cuadrados de las longitudes de las piezas es $166{,}5m^2$ ¿Cuál es el largo de la pieza de menor longitud?

A) $\sqrt{15}m$

B) $1{,}5m$

C) $7{,}5m$

D) $15m$

33) "Si al cuadrado de un número positivo se le resta 54, se obtienen el triple del número". ¿Cuál es el número? Si "x" representa el número una ecuación que permite resolver el problema es:

A) $x^2 - 54 = x^3$

B) $2x - 54 = x^3$

C) $x^2 - 54 = 3x$

D) $2x - 54 = 3x$

34) "La suma de los cuadrados de dos números enteros positivos, impares y consecutivos es 130. ¿Cuáles son esos números? Si "x" representa el menor de esos números una ecuación que permite resolver el problema es:

A) $2x^2 + 2x - 129 = 0$

B) $4x^2 + 4x - 129 = 0$

C) $4x^2 + 8x - 126 = 0$

D) $2x^2 + 4x - 126 = 0$

35) En el rectángulo $ABCD$ de área 75, $AD = \frac{3x}{2}$ y $AB = 3x - 5$, ¿cuál es la longitud de $\overline{AD}$?

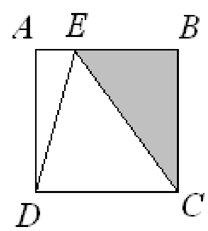
A) $\frac{15}{2}$

B) $\frac{25}{2}$

C) 5

D) 10

36) En la figura $ABCD$ es un cuadrado y $AE = 2$, si el área del cuadrado es el triple del área sombreada, entonces, el perímetro del cuadrado es:



A) 24

B) 30

C) 36

D) 48

37) La medida del largo de un rectángulo excede a la medida del ancho en seis unidades. Si la medida del ancho se aumenta en dos unidades y la del largo se disminuye en tres unidades, el área será 30 unidades cuadradas. ¿Cuál es la medida del largo del rectángulo original?

A) 3

B) 8

C) 9

D) 14

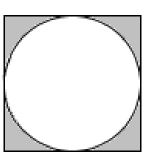
38) "Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles se duplica, y el otro se disminuye en dos unidades se obtiene un triángulo cuya área es igual que el área del triángulo original. ¿Cuál es la medida de los catetos del triángulo isósceles? Si "x" representa la medida de cada catetos del triángulo original, una ecuación que permite resolver el problema es:

A) $x^2 = 2x^2 - 4$
B) $x^2 = 2x^2 - 2$
C) $x^2 = 2x^2 - 2x$
D) $x^2 = 2x^2 - 4x$

39) En un rectángulo, el triple del ancho excede en tres unidades al doble del largo. Si el área del rectángulo es 30. ¿Cuánto es el perímetro del rectángulo?

A) 23
B) 26
C) 34
D) 22

40) En la figura, la circunferencia está inscrita en el cuadrado y el área sombreada es Acm^2. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado? Si "x" es la medida del lado del cuadrado una ecuación que permite resolver el problema es:



A) $x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi = A$
B) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi - x^2 = A$
C) $\frac{x^2}{2}\pi - x^2 = A$
D) $x^2 - \frac{x^2}{2}\pi = A$

41) "La diferencia entre la diagonal mayor y la diagonal menor de un rombo es 12 y el área del rombo es 21 ¿cuál es la medida de la diagonal de mayor longitud?" Si "x" representa la medida de la diagonal mayor una ecuación que permite resolver el problema es:

A) $x^2 - 12x - 42 = 0$
B) $x^2 + 12x - 42 = 0$
C) $x^2 - 12x + 42 = 0$
D) $x^2 + 12x + 42 = 0$

42) La suma de los perímetros de dos cuadrados es 132 y la suma de sus áreas es 549. ¿Cuál es el perímetro de cada uno de los cuadrados?

A) 66 y 66
B) 60 y 72
C) 50 y 82
D) 57 y 75

43) En un triángulo de área 24, las medidas de la base y la altura son números pares consecutivos. Si la base mide más que la altura, ¿cuánto mide la base?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 12

44) Dos círculos son tales que el radio de uno es el doble del otro. Si la suma de las áreas es 45π. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia del círculo mayor?

A) $2\sqrt{15}\pi$
B) $4\sqrt{15}\pi$
C) 6π
D) 12π

45) Si en un triángulo rectángulo la medida de un cateto es las tres cuartas partes de la del otro y la hipotenusa es 10, entonces su área es:

A) 6
B) 8
C) 24
D) 48

46) Si el área de un rombo es 16 y la medida de una diagonal es un sexto de la diferencia entre la medida de la otra diagonal y 4, entonces, ¿cuál es la medida de la diagonal de menor longitud?

A) 2
B) $\frac{4}{3}$
C) 12
D) 16

Ecuaciones fraccionarias

47) Una solución de $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{8}{3}$ es:

A) $3/4$
B) $3/2$
C) $4/3$
D) $1/2$

48) El conjunto solución de $\frac{-x-5}{x+3}=x-1$ es:

A) $\{-2,-1\}$
B) $\{-2,4\}$
C) $\{2,-4\}$
D) $\{1,2\}$

49) Una solución de $x-2=\frac{2}{x}-1$ es:

A) 1
B) -1
C) -2
D) $\sqrt{3}$

50) Una solución de $x+\frac{1}{2x}=2$ es:

A) $\frac{1}{3}$
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

51) El conjunto solución de $\frac{3x}{x-2}=\frac{6x}{x-2}+1$ es:

A) $\{\ \}$
B) $\{2\}$
C) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
D) $\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

52) El conjunto solución de $\frac{4}{x-2}=1+\frac{4}{x+2}$ es:

A) $\{\ \}$
B) $\{-2,2\}$
C) $\{-2\sqrt{5},2\sqrt{5}\}$
D) $\{2\}$

53) La solución de $\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{x}$ es:

A) 2
B) $\frac{7}{3}$
C) $\frac{-2}{3}$
D) $\frac{-5}{3}$

54) Una solución de $2x-\frac{9}{x+4}=\frac{3x-6}{x+4}$ es:

A) $\frac{-3}{2}$

B) $\frac{-1}{2}$

C) -3

D) -1

55) Una solución de $\frac{-7}{x-2}-(x+2)=4$ es:

A) 1

B) 5

C) -1

D) -3

56) El conjunto solución de $\frac{x^2}{x-11}=\frac{-121}{11-x}$ es:

A) ϕ

B) $\{11\}$

C) $\{-11\}$

D) $\{-11,11\}$

Ecuaciones radicales

57) El conjunto solución de $2-\sqrt{2x-1}=0$ es:

A) $\{\ \}$

B) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

D) $\{2\}$

58) El conjunto solución de $\sqrt{x+2}+x=10$ es:

A) $\{\ \}$

B) $\{7,14\}$

C) $\{14\}$

D) $\{7\}$

59) La solución de $-2+\sqrt{1-5x}=0$ es:

A) 1

B) -1

C) $\frac{-3}{5}$

D) $\frac{-1}{5}$

60) Una solución de $\sqrt{\sqrt{8x}}=\sqrt{2x-3}$ es:

A) $\frac{9}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{-1}{2}$

61) El conjunto solución de $x+\sqrt{3x-1}=x-2$ es:

A) $\{\ \}$

B) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

C) $\{-1\}$

D) $\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

62) El conjunto solución de $\sqrt{(2x-1)^2}=2$ es:

A) $\left\{\frac{-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

B) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

D) $\left\{\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right\}$

63) La ecuación $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=2$ tiene:

A) Ninguna solución.
B) Una solución y es entera.
C) Una solución y no es entera.
D) Dos soluciones.

64) El conjunto solución de $\left(8x^3-5\right)^2+29\left(8x^3-5\right)-96=0$ es:

A) $\left\{1,\frac{-3}{2}\right\}$

B) $\left\{-1,\frac{-3}{2}\right\}$

C) $\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$

D) $\left\{-1,\frac{3}{2}\right\}$

65) El conjunto solución de la ecuación $(3x-2)+5(3x-2)^{\frac{1}{2}}-36=0$ es:

A) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

B) $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$

C) $\left\{6,\frac{83}{3}\right\}$

D) $\{6\}$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. El doble del cuadrado de un número negativo equivale al quíntuplo del número aumentado en 63. ¿Cuál es el número?

2. Sean tres números naturales consecutivos, tales que, la suma de los cuadrados de los dos menores, equivale al mayor de los tres aumentado en 20. ¿Cuál es el mayor de los números?

3. El área de un rectángulo es 28. Si la medida del largo excede en $4,5$ a la medida del ancho, entonces, ¿cuál es la longitud del ancho?

4. El cuadrado de un número entero negativo equivale a tres veces ese mismo número, aumentado en 54. ¿Cuál es el número?

5. La diferencia entre dos números naturales es 9 y la suma de sus cuadrados es 725, entonces, ¿cuál es el número menor?